Оглавление

Глава 1

Классические методы принятия решений

1.1. Постановка задачи принятия решений в условиях неопределенности

Классическим методам принятия решений посвящено большое количество публикаций [5, 6, 7, 10, 12]. Это связано с тем, что мы принимаем решение в повседневной жизни каждый день большое число раз. При этом наши решения могут быть “правильными” и “неправильными” в некотором смысле, оптимальными и неоптимальными. Решения, принимаемые нами, обычно ориентированны на ситуацию, которая произойдет или будет иметь место в ближайшем или далеком будущем, но само решение основывается на опыте, знаниях и интуиции, основанными на событиях прошлого. Поэтому основная сложность принятия того или иного решения заключается в том, что информация о “будущем” обычно ограниченна и неопределенна. Если неответственные решения могут иногда приниматься интуитивно, то для принятия ответственных решений, связанных со значимыми последствиями, требующих учета большого числа факторов, необходим формальный математический аппарат, позволяющий сравнивать возможные альтернативные действия или решения не только качественно, но и количественно. Для этого, прежде всего, необходимо определить основные элементы ситуации принятия решений и классифицировать задачи принятия решений с точки зрения информации, имеющейся в распоряжении так, чтобы отнести интересующую нас ситуацию принятия решений к той или иной типовой задаче.

1.1.1. Основные элементы задачи принятия решений

Принятие решений имеет смысл, если существуют различные варианты альтернативных действий, число которых не меньше 2 и выбор одного из которых может привести к определенным последствиям. Пусть имеется совокупность $\mathcal{A}$ альтернативных *действий (альтернатив, мероприятий, операций)* $\mathcal{A} = \{a_1, ..., a_n\}$, $n \geq 2$, которые может совершить или выбрать лицо, принимающее решение (ЛПР), для достижения поставленной цели. Примерами альтернативных действий могут быть { открыть счет в банке, купить акции предприятия, держать деньги дома}, { производить 1 изделие, 2 изделия и т.д.}, { использовать 1 единицу оборудования, 2 и т.д.}.

На выбор того или иного решения (действия) оказывают влияние объективные условия. Например, на открытие счета в банке или покупку акций предприятия влияет экономическая ситуация, которая будет иметь место на определенном периоде времени, на количество производимых изделий влияет величина спроса на эти изделия (относительная или абсолютная). Объективные условия представляются в задаче принятия решений в виде множества *состояний природы* $\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_m\}$, одно из которых ω_i, $i \in \{1, 2, ..., m\}$, будет иметь место в действительности в момент реализации или выполнения выбранного действия. Приведем примеры состояний природы: {экономический спад в заданный период времени (ω_1), подъем (ω_2) и стабильное состояние (ω_3)}, {низкий спрос на продукцию (ω_1), средний спрос (ω_2), высокий спрос (ω_3)}, {выполнение (ω_1) и невыполнение (ω_2) обязательств поставщика комплектующих}.

Таких примеров можно привести множество в зависимости от конкретной задачи. Главной особенностью множества состояний природы является то, что это множество должно быть полным, т.е. оно должно включать все возможные ситуации. Другой особенностью множества состояний природы является то, что заранее не известно, какое состояние будет иметь место в будущем.

Состояния природы могут быть также комбинированными. Например, если одновременно рассматривать второй и третий примеры состояний природы, то получим следующее множество из 6 состояний: низкий спрос и выполнение обязательств, низкий спрос и невыполнение обязательств, средний спрос и выполнение обязательств, средний спрос и невыполнение обязательств, высокий спрос и выполнение обязательств, высокий спрос и невыполнение обязательств.

Следует отметить, что множество состояний природы может быть бесконечным и непрерывным. Например, если наше решение достаточно жестко зависит от объема продаж в ближайшем будущем, который выражен в денежных условных единицах, то множество состояний в данном случае - множество неотрицательных вещественных чисел.

Другим фактором, влияющим на принятие решений, т.е. на выбор одного из действий, является последствие принимаемого решения, выраженное в некоторой числовой форме и зависящее от состояния природы. Другими словами, последствие есть функция, определенная на множестве альтернатив и на множестве состояний природы, т.е. для каждого действия a_i и для каждого состояния природы ω_j определим последствия в виде *полезности* (выгоды, дохода) в некоторых единицах $u(a_i, \omega_j)$, т.е. $u : (\mathcal{A} \times \Omega) \to \mathbb{R}$. Кроме того, определим случайную величину $\mathbf{u}(a_i)$ на $(\Omega, \mathcal{P}o(\Omega))$, принимающую значения $u(a_i, \omega_j)$. Величины $u(a_i, \omega_j)$, играющие роль платежей в теории игр, обычно задаются из эвристических, субъективных соображений. При этом возникают специфические трудности при их числовой оценке, обусловленные такими факторами, как болезни, удовольствия, престиж, репутация и т.д. Значения полезности можно задавать относительно, поэтому их также называют показателями предпочтения. В экономических задачах зачастую вместо полезностей используются потери, обозначаемые $l(a_i, \omega_j)$. При этом потери и полезности связаны между собой соотношением $u(a_i, \omega_j) = -l(a_i, \omega_j)$, т.е. значение потерь может быть сведено формально к полезности, поставив знак отрицания. Другими словами, значения потерь можно рассматривать как отрицательные значения полезности. В дальнейшем для краткости будем записывать u_{ij} вместо $u(a_i, \omega_j)$.

Если множество состояний природы является непрерывным, то полезности задаются обычно в виде некоторой типовой функции $u(a_i, \omega)$, где, в частности, $\omega \in [a, b]$. Например, если состояния природы определяются объемом продаж ω, выраженных в денежных единицах, и полезности линейно зависят от этого объема продаж, то $u(a_i, \omega) = v_i \omega + w_i$, где параметры v_i и w_i зависят от конкретной альтернативы.

Задача ЛПР состоит в том, чтобы принять какое-либо решение или выполнить какое-либо действие из совокупности $\mathcal{A}$. Каждое из этих действий есть *чистая стратегия*. Однако при многократном принятии решений совсем не обязательно ограничиваться использованием только одной чистой стратегии. Можно использовать смесь чистых стратегий в соответствии с некоторым законом распределения вероятностей $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n)$, определенным на множестве действий $(\mathcal{A}, \mathcal{P}o(\mathcal{A}))$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$. В этом случае будем говорить о *смешанной стратегии* или *рандомизированным действии*. При смешанной стратегии чистые стратегии используются с вероятностями $\lambda_1, ..., \lambda_n$. Можно заметить, что смешанные стратегии образуют бесконечное множество альтернатив, каждый элемент которого определяется некоторым распределением λ. Соответственно, полезность каждой альтернативы при заданном состоянии природы ω_j зависит от λ и определяется как $u(\lambda, \omega_j) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_{ij}$.

В задачах принятия решений смешанная стратегия $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n)$ может быть реализована одним из следующих способов [11].

1) *Вероятностный способ* состоит в том, что принимающий решение выбирает одну из альтернатив не путем явного указания, а случайно, причем так, что λ_i есть вероятность выбора альтернативы a_i.

2) *Физическая смесь стратегий* получается тогда, когда возможно «смешивание» альтернатив (эта возможность определяется физической природой альтернатив). В этом случае вектор $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ соответствует физической смеси чистых стратегий, в которой λ_i - доля i-ых чистых стратегий.

3) *Статистический способ* может быть реализован в том случае, когда решение принимается многократно. Тогда i-ая компонента вектора λ указывает частоту использования i-ой чистой стратегии.

Приведем пример постановки задачи принятия решений. Предположим, что необходимо выбрать одно из трех ($n = 3$)

Таблица 1.1. Функция полезности

	Быстрый подъем	Средний подъем	Неизменное состояние	Спад
Облигации	12	8	6	3
Акции	15	7	3	-2
Депозит	7	7	7	7

действий: купить облигации (a_1), купить акции предприятия (a_2) или положить деньги в банк на депозит (a_3). Каждое из действий зависит от четырех ($m = 4$) возможных состояний природы, которые являются состояниями экономики в течение одного года: быстрый подъем экономики (ω_1), средний подъем экономики (ω_2), неизменное состояние экономики (ω_3), спад экономики (ω_4). Функция полезности, характеризующая ставку дохода в процентах от вложенной суммы, представлена в табл. 1.1.

Решение задачи выбора оптимального действия полностью определяется двумя факторами: 1) типом и объемом информации о состояниях природы и 2) критерием оптимальности альтернативы. Собственно говоря, критерий оптимальности также зависит от имеющейся информации о состояниях природы. Поясним более детально, что подразумевается под понятием информации о состояниях природы. Информация о состояниях природы отражает степень уверенности в том, какое состояние будет в действительности иметь место, или степень уверенности, что одно состояние более вероятно по сравнению с другим. В то же время, множество самих состояний является известным. Информация о состояниях существенно влияет на решение задачи. Так, например, если с уверенностью 100% известно, что будет иметь место быстрый подъем экономики, то очевидно, что покупка акций предприятия даст наибольший доход. Рассмотренная ситуация является наиболее простой и приводит к принятию решений в условиях полной *определенности*. Другим крайним случаем является отсутствие какой-либо информации о состояниях природы. В этой ситуации имеет место задача принятия решений в условиях *неопределенности*. Конечно, это достаточно редкий случай, так как обычно, исходя из предыдущего опыта или наблюдений, а также текущих тенденций, можно с некоторой вероятностью говорить о будущих состояниях. Однако знание вероятностей состояний не значит, что, выбрав оптимальное решение на основе этой информации, получаем максимальный выигрыш, так как даже высокая вероятность состояния не означает, что будет реализовано именно это состояние. Другими словами, принимая решение в данной ситуации, риск ошибочного действия все равно остается. Поэтому задача принятия решений при такой исходной информации ведет к поиску решения в условиях *риска*. В то же время, даже если известны вероятности некоторых состояний, это совсем не означает, что можно построить единственное распределение вероятностей для состояний природы, и есть смысл рассматривать множества распределений. Информация о состояниях природы вообще необязательно может быть представлена в виде каких-либо вероятностей. Например, это могут быть сравнительные оценки состояний. В тех случаях, когда невозможно определить единственное распределение вероятностей для состояний природы, имеет место задача принятия решений в условиях *неполноты информации*. В принципе принятие решений в условиях неполноты информации является частным случаем принятия решений в условиях риска. Однако здесь эти классы задач разделяются, так как их решения и критерии существенно отличаются друг от друга.

Каждая задача принятия решений имеет свой *критерий* оптимальности, т.е. некоторое правило, по которому численно определяется условие предпочтения одного действия по отношению к другому. Критерий оптимальности определяет упорядочивание всех альтернатив (множества $\mathcal{A}$) по предпочтению. При этом, как уже было сказано, критерий оптимальности полностью зависит от информации о состояниях природы.

В дальнейшем будем рассматривать вопросы определения оптимального действия или наилучшей стратегии только на основе имеющейся априорной информации о состоянии природы без уточнения знаний о действительном состоянии природы путем проведения эксперимента.

1.2. Принятие решений в условиях определенности

Принятие решений в условиях определенности характеризуется однозначной или детерминированной связью между принятым решением и его результатом. Это наиболее простой класс задач принятия решений, когда состояние природы, которое будет определенно иметь место, известно заранее, т.е. до выполнения действия. ЛПР в данном случае может всегда точно предсказать последствия от выбора каждого действия. Это фактически означает, что число состояний сводится к одному, т.е. $m = 1$. Поэтому логично потребовать от рационального лица, принимающего решение, выбрать то действие, которое дает наибольшее значение функции полезности. Если в задаче с вложением денег определенно известно, что будет иметь место быстрый подъем экономики, то из трех альтернатив с полезностью 12, 15 и 7, выбирается та, которая соответствует максимальной полезности 15, т.е. покупка акций предприятия.

1.3. Принятие решений в условиях неопределенности

В условиях неопределенности лицо, принимающее решение, не может сказать что-либо о возможных состояниях природы, т.е. абсолютно неизвестно, какое из состояний будет иметь место. Для решения данной задачи наиболее распространенными критериями принятия решений являются:

1) критерий равновозможных состояний (критерий Лапласа);

2) критерий максимина Вальда;

3) критерий пессимизма–оптимизма Гурвица;

4) критерий минимакса сожалений Сэвиджа.

Следует отметить, что приведенные критерии являются далеко не единственными для принятия решений в условиях неопределенности. Однако остальные критерии являются в основном комбинацией этих критериев.

1.3.1. Критерий равновозможных состояний

Критерий равновозможных состояний основан на предположении Лапласа, согласно которому, если вероятности состояний абсолютно неизвестны, то они предполагаются быть равными. Согласно этому критерию, действие a_k является оптимальным,

Таблица 1.2. Функция полезности

	1	2	3	...	8	9	10	Сумма
Действие 1	1	0	0	...	0	0	100	101
Действие 2	9.9	10	10	...	10	10	10.1	100

если

$$\sum_{j=1}^{m} u_{kj} = \max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^{m} u_{ij},$$

т.е. выбирается то действие, сумма значений полезности которого по всем состояниям природы максимальна.

В задаче с вложением денег для каждого действия вычисляются суммарные полезности:

$$a_1 : 12 + 8 + 6 + 3 = 29,$$
$$a_2 : 15 + 7 + 3 - 2 = 23,$$
$$a_3 : 7 + 7 + 7 + 7 = 28.$$

Первое действие дает максимальное значение суммарной полезности. Следовательно, оно является оптимальным.

Критерий Лапласа имеет ряд недостатков. Отметим два из них. Первый связан с тем, что предположение равномерного распределения вероятностей состояний природы далеко не всегда оправдано. Вторым недостатком является то, что при вычислении суммы полезностей может происходить «эффект компенсации» малых значений полезности большими [11]. В качестве иллюстрации сказанного рассмотрим пример задачи принятия решений с множеством состояний $\{1, ..., 10\}$ и двумя альтернативами. Функции полезности представлены в табл. 1.2. Действие 1 является более предпочтительным, чем действие 2, так как сумма полезностей для первого действия больше, чем для второго. Однако функция полезности для действия 1 распределена крайне неравномерно, поэтому при выборе действия 1 ЛПР рискует не получить ничего. В то же время при выборе действия 2 он имеет гарантированный выигрыш, равный 9.9.

1.3.2. Критерий максимина Вальда

Согласно критерию максимина, для каждой строки (для каждого действия) матрицы значений полезности определяется минимальное значение полезности. Далее из всех действий выбирается такое, которое соответствует максимальному из полученных минимальных значений, т.е. действие a_k является оптимальным, если

$$\min_{j=1,\ldots,m} u_{kj} = \max_{i=1,\ldots,n} \min_{j=1,\ldots,m} u_{ij}.$$

Обозначим $\underline{\mathbf{u}}_k = \min_{i=1,\ldots,m} u_{ki}$. Тогда, возвращаясь к задаче с вложением денег, можно вычислить:

$$\underline{\mathbf{u}}_1 = \min(12, 8, 6, 3) = 3,$$
$$\underline{\mathbf{u}}_2 = \min(15, 7, 3, -2) = -2,$$
$$\underline{\mathbf{u}}_3 = \min(7, 7, 7, 7) = 7.$$

Отсюда $\max(\underline{\mathbf{u}}_1, \underline{\mathbf{u}}_2, \underline{\mathbf{u}}_3) = \max(3, -2, 7) = 7$, что соответствует третьему действию. Следовательно, оптимальное действие – это положить деньги в банк на депозит.

Следует отметить, что критерий максимина является перестраховочным, поскольку природа не может быть сознательным противником. По критерию Вальда выбирают стратегию, которая дает гарантированный выигрыш при наихудшем варианте состояния природы. Логическая основа критерия заключается в том, что из всех возможных состояний природы выбирается "наихудшее" для каждого действия с точки зрения полезности. ЛПР не может столкнуться с более худшим результатом, чем тот, на который он ориентируется. Критерий максимина используется крайним пессимистом, не желающим идти ни на какой риск. Поэтому этот критерий иногда называют критерием крайнего пессимизма.

Главный недостаток критерия Вальда состоит в том, что при выборе решения учитывается только наихудший вариант. Например, при сравнении альтернатив, приведенных в табл. 1.3, согласно критерию Вальда, действие 1 более предпочтительно, чем действие 2, хотя, за исключением одного состояния природв, действие 2 доминирует действие 1.

1.3.3. Критерий пессимизма–оптимизма Гурвица

Критерий Гурвица является в некотором смысле компромиссным критерием и использует линейную комбинацию опти-

Таблица 1.3. Функция полезности

	1	2	3	4	5	$\min_{j=1,\ldots,m} u_{ij}$
Действие 1	2	3	1	5	4	1
Действие 2	0	6	8	17	9	0

мистического и пессимистического подходов. Пусть

$$\overline{\mathbf{u}}_k = \max_{i=1,\ldots,m} u_{ki},\ \underline{\mathbf{u}}_k = \min_{i=1,\ldots,m} u_{ki}.$$

Согласно критерию Гурвица, действие a_k является оптимальным, если

$$\alpha \cdot \underline{\mathbf{u}}_k + (1-\alpha) \cdot \overline{\mathbf{u}}_k = \max_{i=1,\ldots,n} \left\{ \alpha \cdot \underline{\mathbf{u}}_i + (1-\alpha) \cdot \overline{\mathbf{u}}_i \right\}.$$

Здесь $\alpha \in [0,1]$ – коэффициент, или параметр, пессимизма. Критерий Гурвица основан на следующих двух предположениях: природа может находиться в самом невыгодном состоянии с вероятностью α и в самом выгодном – с вероятностью $1-\alpha$. Заметим, что если $\alpha = 1$, то критерий Гурвица сводится к критерию максимина. Если $\alpha = 0$, то критерий Гурвица сводится к так называемому критерию максимакса. Выбор коэффициента α полностью определяется ЛПР.

Если в задаче с вложением денег использовать критерий Гурвица с $\alpha = 0.5$, то

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{u}}_1 &= \max(12, 8, 6, 3) = 12, \\ \overline{\mathbf{u}}_2 &= \max(15, 7, 3, -2) = 15, \\ \overline{\mathbf{u}}_3 &= \max(7, 7, 7, 7) = 7. \end{aligned}$$

Значения $\underline{\mathbf{u}}_1, \underline{\mathbf{u}}_2, \underline{\mathbf{u}}_3$ уже были получены при рассмотрении критерия максимина Вальда. Тогда

$$0.5 \cdot \underline{\mathbf{u}}_1 + 0.5 \cdot \overline{\mathbf{u}}_1 = 7.5,$$

$$0.5 \cdot \underline{\mathbf{u}}_2 + 0.5 \cdot \overline{\mathbf{u}}_2 = 6.5,$$

$$0.5 \cdot \underline{\mathbf{u}}_3 + 0.5 \cdot \overline{\mathbf{u}}_3 = 7.$$

Отсюда оптимальное действие – это покупка облигаций (a_1), так как это действие соответствует максимальному значению выражения $0.5 \cdot \underline{\mathbf{u}}_i + 0.5 \cdot \overline{\mathbf{u}}_i$.

Критерий Гурвица является достаточно гибким за счет возможности изменения коэффициента α.

Таблица 1.4. Матрица сожалений

	Быстрый подъем	Средний подъем	Неизменное состояние	Спад
Облигации	3	0	1	4
Акции	0	1	4	9
Депозит	8	1	0	0

1.3.4. Критерий минимакса сожалений Сэвиджа

Сожаление в теории принятия решений – это потери в результате упущенных возможностей. Пусть природа находится в состоянии ω_i. Мера сожаления для k-го действия и j-го состояния природы определяется как разность

$$\Delta u_{kj} = \max_{i=1,\ldots,n} u_{ij} - u_{kj}.$$

Другими словами, мера сожаления Δu_{kj} определяется как разность между максимальным элементом в столбце матрицы полезности и самим значением полезности u_{kj} в этом столбце. Она означает максимальный дополнительный выигрыш, который достигается, если для j-го состояния природы вместо k-го действия выбрать оптимальное для этого состояния действие. Заметим, что мера сожаления всегда положительна. Согласно критерию минимакса сожалений Сэвиджа, действие a_k является оптимальным, если

$$\max_{j=1,\ldots,m} \Delta u_{kj} = \min_{i=1,\ldots,n} \max_{j=1,\ldots,m} \Delta u_{ij}.$$

Фактически для принятия решений используется критерий минимакса (минимум из максимальных значений), но не для матрицы полезности, а для матрицы сожалений.

Используем данный критерий в задаче с вложением денег. Матрица сожалений показана в табл. 1.4.

Обозначив $Q_i = \max_{j=1,\ldots,m} \Delta u_{ij}$, можно записать:

$$Q_1 = \max\{3, 0, 1, 4\} = 4,$$

$$Q_2 = \max\{0, 1, 4, 9\} = 9,$$

$$Q_3 = \max\{8, 1, 0, 0\} = 8.$$

Отсюда $\min(Q_1, Q_2, Q_3) = \min(4, 9, 8) = 4$, что соответствует первому действию. Следовательно, оптимальное действие – это покупка облигаций (a_1).

1.4. Принятие решений в условиях риска

Ситуация принятия решений в условиях риска возникает в случаях, когда известны априорные вероятности состояний природы, т.е. имеется информация о распределении

$$\pi(\omega_1), ..., \pi(\omega_m), \ \sum_{i=1}^{m} \pi(\omega_i) = 1.$$

Данное распределение может быть получено на основе статистического анализа состояний природы или их субъективного описания. Например, исходя из статистических данных об экономической ситуации и основных тенденциях ее изменения, можно сделать прогноз относительно состояния экономики на определенный период. Так, рассматривая три состояния: низкий спрос на продукцию предприятия, средний спрос, высокий спрос, можно предположить, учитывая различные факторы спроса, что шансы иметь низкий спрос примерно равны 10%, шансы иметь средний спрос – около 60% и шансы иметь высокий спрос равны $100 - 10 - 60 = 30\%$.

Вероятности комбинированных состояний вычисляются как произведения вероятностей соответствующих исходных состояний, если выполняется условие независимости комбинированных факторов.

В случае бесконечного множества состояний, например $\Omega = [a, b]$, априорное распределение состояний заменяется плотностью π, определенной на множестве значений ω и удовлетворяющей условию

$$\int_{\Omega} \pi(x) \mathrm{d}x = 1.$$

Существует ряд критериев принятия решений при наличии вероятностей состояний природы. К наиболее известным относятся: критерий максимума ожидаемой полезности; критерий Ходжа–Лемана; критерий наиболее вероятного состояния природы; критерий минимума ожидаемых сожалений.

1.4.1. Критерий максимума ожидаемой полезности

Это наиболее распространенный критерий, согласно которому оптимальное действие имеет максимальную ожидаемую полезность. Обозначим вектор значений полезности, соответствующих k-му действию, $\mathbf{u}_k = (u_{k1}, ..., u_{km})$. Ожидаемая полезность k-го действия есть математическое ожидание полезности, соответствующей этому действию, т.е.

$$\mathbb{E}_\pi \mathbf{u}_k = \sum_{j=1}^{m} u_{kj} \cdot \pi(\omega_j).$$

Следует отметить, что если множество состояний природы бесконечно и известна плотность π, то ожидаемая полезность k-ого действия определяется как

$$\mathbb{E}_\pi \mathbf{u}_k = \int_\omega u_k(x) \cdot \pi(x) \mathrm{d}x.$$

Критерий оптимальности можно записать следующим образом. Действие a_k является оптимальным, если для любого $i \neq k$ выполняется неравенство $\mathbb{E}_\pi \mathbf{u}_k \geq \mathbb{E}_\pi \mathbf{u}_i$ или условие $\mathbb{E}_\pi \mathbf{u}_k = \max_{i=1,...,n} \mathbb{E}_\pi \mathbf{u}_i$.

Рассмотрим снова пример с вложением денег, предполагая, что с вероятностью 0.4 будет происходить быстрый рост экономики, с вероятностью 0.2 будет средний рост, с вероятностью 0.3 будет неизменное состояние и с вероятностью 0.1 будет спад, т.е. $\pi(\omega_1) = 0.4$, $\pi(\omega_2) = 0.2$, $\pi(\omega_3) = 0.3$, $\pi(\omega_4) = 0.1$. Тогда ожидаемые полезности альтернатив вычисляются как

$$\mathbb{E}_\pi \mathbf{u}_1 = 12 \cdot 0.4 + 8 \cdot 0.2 + 6 \cdot 0.3 + 3 \cdot 0.1 = 8.5,$$

$$\mathbb{E}_\pi \mathbf{u}_2 = 15 \cdot 0.4 + 7 \cdot 0.2 + 3 \cdot 0.3 - 2 \cdot 0.1 = 8.1,$$

$$\mathbb{E}_\pi \mathbf{u}_3 = 7 \cdot 0.4 + 7 \cdot 0.2 + 7 \cdot 0.3 + 7 \cdot 0.1 = 7.$$

Максимальное значение ожидаемой полезности – $\mathbb{E}_\pi \mathbf{u}_1 = 8.5$. Следовательно, оптимальное действие – это покупка облигаций (a_1).

Так как критерий максимума ожидаемой полезности является одним из наиболее важных и распространенных, рассмотрим использование этого критерия при определении смешанной стратегии, или рандомизированного действия, т.е. задача заключается в определении такого распределения вероятностей $\lambda^* = (\lambda_1^*, ..., \lambda_n^*)$ на множестве действий $\mathcal{A}$, при котором ожидаемая полезность

$$\mathbb{E}_\pi \mathbf{u}(\lambda^*) = \sum_{j=1}^{m} u(\lambda^*, \omega_j)\pi(\omega_j) = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^* u_{ij} \right) \pi(\omega_j)$$

была бы максимальной. Другими словами, стратегия λ^* является оптимальной, если для всех распределений λ выполняется неравенство $\mathbb{E}_\pi \mathbf{u}(\lambda^*) \geq \mathbb{E}_\pi \mathbf{u}(\lambda)$. Таким образом, для нахождения оптимальной стратегии λ^* необходимо решить следующую задачу линейного программирования:

$$\sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_{ij} \right) \pi(\omega_j) \to \max_{\lambda}$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1,\ \lambda_i \geq 0, i = 1, ..., n.$$

Достаточно просто показать, что оптимальное решение задачи – чистая стратегия, т.е. $\lambda_i \in \{0, 1\}$. Действительно, множество распределений λ образует n-мерный симплекс вероятностей, а оптимальное решение задачи линейного программирования определяется крайними точками множества допустимых решений. Поэтому оптимальным распределением λ^* является одно из следующих (крайние точки):

$$(1, 0, ..., 0), (0, 1, ..., 0), ..., (0, 0, ..., 1).$$

Таким образом, задача поиска оптимальной смешанной стратегии сводится к уже рассмотренной задаче максимизации ожидаемой полезности, т.е. к поиску оптимальной чистой стратегии. В то же время, если расширить задачу принятия решений, наложив на распределение λ дополнительные ограничения, например $\lambda_i \geq \lambda_k$ для некоторых i и k, то смешанная стратегия может отличаться от чистой.

Предположим, что в примере с вложением денег используется смешанная стратегия, но с условием, что вложения в акции будут осуществляться чаще, чем в облигации. Тогда появляется дополнительное ограничение на распределение λ в виде неравенства $\lambda_1 \leq \lambda_2$. В результате имеем следующую задачу оптимизации:

$$\mathbb{E}_\pi \mathbf{u}(\lambda) = 0.4(12\lambda_1 + 15\lambda_2 + 7\lambda_3) + 0.2(8\lambda_1 + 7\lambda_2 + 7\lambda_3) + \\ +0.3(6\lambda_1 + 3\lambda_2 + 7\lambda_3) + 0.1(3\lambda_1 - 2\lambda_2 + 7\lambda_3) \to \max_\lambda$$

при ограничениях $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$ и $\lambda_1 \leq \lambda_2$.

Оптимальное решение: $\lambda_1^* = 0.5$, $\lambda_2^* = 0.5$, $\lambda_3^* = 0$. При этом следует отметить, что $\mathbb{E}_\pi \mathbf{u}(\lambda^*) = 8.3$, что меньше, чем $\mathbb{E}_\pi \mathbf{u}_1 = 8.5$. Однако введенное дополнительное условие не позволяет использовать a_1 в качестве оптимального действия.

1.4.2. Критерий Ходжа–Лемана

Критерий Ходжа–Лемана базируется одновременно на критериях максимина Вальда и максимума ожидаемой полезности [3]. Обозначим

$$\mathbb{E}_\pi \mathbf{u}_k = \sum_{j=1}^{m} u_{kj} \cdot \pi(\omega_j), \ \underline{\mathbf{u}}_k = \min_{j=1,\dots,m} u_{kj} = \underline{\mathbf{u}}_k.$$

Тогда действие a_k является оптимальным, если

$$\alpha \cdot \underline{\mathbf{u}}_k + (1-\alpha) \cdot \mathbb{E}_\pi \mathbf{u}_k = \max_{i=1,\dots,n} \left\{ \alpha \cdot \underline{\mathbf{u}}_i + (1-\alpha) \cdot \mathbb{E}_\pi \mathbf{u}_i \right\}.$$

Здесь $\alpha \in [0,1]$ – коэффициент, или параметр, пессимизма. Заметим, что если $\alpha = 1$, то критерий Ходжа–Лемана сводится к критерию максимина. Если $\alpha = 0$, то критерий Ходжа–Лемана сводится к критерию максимума ожидаемой полезности.

Если в задаче с вложением денег применять критерий Ходжа–Лемана с $\alpha = 0.5$, то, используя уже ранее полученные значения ожидаемой полезности (см. параграф 1.4.1) и значения $\underline{\mathbf{u}}_k$ (см. параграф 1.3.2), получаем:

$$0.5 \cdot \underline{\mathbf{u}}_1 + 0.5 \cdot \mathbb{E}_\pi \mathbf{u}_1 = 0.5 \cdot 3 + 0.5 \cdot 8.5 = 5.75,$$

$$0.5 \cdot \underline{\mathbf{u}}_2 + 0.5 \cdot \mathbb{E}_\pi \mathbf{u}_2 = 0.5 \cdot (-2) + 0.5 \cdot 8.1 = 3.05,$$

$$0.5 \cdot \underline{\mathbf{u}}_3 + 0.5 \cdot \mathbb{E}_\pi \mathbf{u}_3 = 0.5 \cdot 7 + 0.5 \cdot 7 = 7.$$

Отсюда оптимальное действие – это положить деньги в банк на депозит (a_3), так как это действие соответствует максимальному значению величины $0.5 \cdot \underline{\mathbf{u}}_i + 0.5 \cdot \mathbb{E}_\pi \mathbf{u}_i$.

1.4.3. Критерий наиболее вероятного состояния природы

Согласно критерию наиболее вероятного состояния, выбирается состояние природы, вероятность которого максимальна, и далее задача решается в условиях полной определенности в предположении, что обязательно будет иметь место выбранное состояние. Оптимальным считается действие, соответствующее максимальному значению полезности для выбранного состояния. В примере с вложением денег максимальную вероятность $\pi(\omega_1) = 0.4$ имеет состояние быстрого роста экономики. Для этого состояния покупка акций имеет наибольшую полезность (15). Следовательно, оптимальное действие – покупка акций (a_2).

Следует отметить, что критерий наиболее вероятного состояния природы используется достаточно редко и в основном при существенном различии между максимальной вероятностью и остальными вероятностями состояний природы.

1.4.4. Критерий минимума ожидаемых сожалений

Критерий минимума ожидаемых сожалений является обобщением критерия минимакса сожалений Сэвиджа, используемого для решения задачи принятия решений в условиях неопределенности. Согласно данному критерию, вычисляется матрица сожалений и затем для каждого действия вычисляется ожидаемое сожаление как математическое ожидание функции сожалений. Оптимальное действие соответствует минимальному значению ожидаемого сожаления. Обозначим вектор сожалений, соответствующих k-му действию, $\Delta\mathbf{u}_k = (\Delta u_{k1}, ..., \Delta u_{km})$. Ожидаемое сожаление для k-го действия равно

$$\mathbb{E}_\pi \Delta\mathbf{u}_k = \sum_{j=1}^{m} \Delta u_{kj} \cdot \pi(\omega_j).$$

Критерий оптимальности можно записать следующим образом. Действие a_k является оптимальным, если для любого $i \neq k$ выполняется неравенство $\mathbb{E}_\pi \Delta \mathbf{u}_k \leq \mathbb{E}_\pi \Delta \mathbf{u}_i$ или условие $\mathbb{E}_\pi \Delta \mathbf{u}_k = \min_{i=1,\dots,n} \mathbb{E}_\pi \Delta \mathbf{u}_i$.

Используем данный критерий в задаче с вложением денег. Ожидаемые сожаления (см. матрицу сожалений в описании критерия минимакса сожалений Сэвиджа) имеют вид:

$$\mathbb{E}_\pi \Delta \mathbf{u}_1 = 3 \cdot 0.4 + 0 \cdot 0.2 + 1 \cdot 0.3 + 4 \cdot 0.1 = 1.9,$$

$$\mathbb{E}_\pi \Delta \mathbf{u}_2 = 0 \cdot 0.4 + 1 \cdot 0.2 + 4 \cdot 0.3 + 9 \cdot 0.1 = 2.3,$$

$$\mathbb{E}_\pi \Delta \mathbf{u}_3 = 8 \cdot 0.4 + 1 \cdot 0.2 + 0 \cdot 0.3 + 0 \cdot 0.1 = 3.4.$$

Минимальное значение ожидаемого сожаления равно $\mathbb{E}_\pi \Delta \mathbf{u}_1 = 1.9$. Следовательно, оптимальное действие – покупка облигаций (a_1).

1.5. Определение функции полезности и психологические аспекты принятия решений

Вернемся к критерию максимума ожидаемой полезности, так как он имеет наибольшее распространение при решении задач принятия решений. Матрица (таблица) полезности, рассмотренная в примерах, содержит полезности (доходы), выраженные в терминах денег. Однако ожидаемые денежные значения не всегда являются наилучшим критерием в задачах принятия решений. Значение денег изменяется в различных ситуациях и для различных лиц, принимающих решение. Необходимо отметить, что значение или полезность денег не является линейной функцией от количества денег. Люди осуществляют страховые выплаты для того, чтобы избежать возможности финансовых потерь в результате нежелательных событий. В то же время, если потери в будущем могут оказаться относительно большими, человек предпочитает осуществить страховые выплаты. Если субъект считает, что потери будут незначительными или маловероятными, то шанс приобретения им страховки существенно уменьшается.

Субъекты различаются в их отношении к риску, и эти различия влияют на их выбор. Поэтому ожидаемый денежный доход как мера для принятия решений может быть неприемлемым по ряду причин, одной из которых является тот факт, что ожидаемые денежные значения могут не совсем адекватно отражать нежелание рисковать. Например, предположим, что имеется выбор между получением 10$ без каких-либо условий как гарантированный доход или за участие в игре. Результат игры зависит от подбрасывания симметричной монеты. Если выпадает орел, то игрок получает 1000$. Однако, если выпадает решка, игрок теряет 950$. Первая альтернатива имеет ожидаемое вознаграждение 10$, вторая – $0.5 \cdot 1000 + 0.5 \cdot (-950) = 25$$. Очевидно, что второй выбор был бы более предпочтительным, если бы критерием было бы ожидаемое денежное вознаграждение. В то же время субъект может предпочесть гарантированные 10$, чтобы избежать риска потери 950$. Другим примером является покупка лотерейных билетов. Люди зачастую покупают не задумываясь билет за 1$. В то же время достаточно сложно найти кого-либо, кто купит лотерейный билет за 10000$ при том же ожидаемом выигрыше.

Рассмотрим известный Санкт–Петербургский парадокс Бернулли. Парадокс состоит в следующем: симметричную монету, вероятности выпадения орла и решки которой равны 1/2, бросают до тех пор, пока не появится орел. Игрок получает $2^m$$, если первое выпадение орла произойдет на m-м испытании. Вероятность этого события равна вероятности последовательного выпадения решек в первых $n-1$ испытаниях и появления орла на m-м испытании, которая равна $(1/2)^m$. Таким образом, игрок может получить 2$ с вероятностью 1/2, 4$ с вероятностью 1/4, 8$ с вероятностью 1/8 и т.д. Следовательно, среднее (ожидаемое) значение выигрыша равно

$$2 \cdot 1/2 + 4 \cdot 1/4 + ... = 1 + 1 + ...,$$

и эта сумма бесконечна. Отсюда следует, что за участие в игре можно заплатить какую угодно сумму. Однако никто не будет в этом случае руководствоваться средним денежным выигрышем. Бернулли предложил рассматривать не денежную стоимость исходов, а их значимость для играющего или “внутреннюю” стоимость денег. Разумно предположить, что для многих субъектов “внутренняя” стоимость денег увеличивается с ростом суммы денег, но в меньшей степени. Такой функцией является, например, логарифм. Так, если полезность $n\$$ равна $\lg n$, то ожидаемое значение полезности игры равно $1/2 \cdot \lg 2 + 1/4 \cdot \lg 4 + \ldots$, что является конечным числом.

Процесс принятия решений включает среди прочих психологические и экономические факторы, и концепция полезности – это попытка измерить полезность денег для ЛПР и объяснить возникающие противоречия и парадоксы принятия решений. Поэтому для того, чтобы принять осознанное решение, учитывающее отношение ЛПР к риску, необходимо преобразовать функцию или матрицу доходов в функцию или матрицу полезности. Возникает вопрос, как измерить функцию полезности для конкретного ЛПР.

Рассмотрим пример задачи принятия решений относительно инвестиций. Прежде всего определим, что означает полезность, скажем $u_{11} = 12$. Это можно сделать в соответствии со следующим алгоритмом.

a. Назначим 100 единиц полезности и ноль единиц полезности соответственно наибольшему и наименьшему доходам, выраженным в \$, в таблице доходов. Для рассматриваемого числового примера, назначается 100 единиц значению 15, и 0 – значению -2.

b. Попросим ЛПР выбрать между следующими сценариями:

b.1. Просто получить 12\$ как гарантированный доход

или

b.2. Участвовать в следующей игре: выиграть 15\$ с вероятностью π или выиграть 2\$ с вероятностью $(1-\pi)$, где π – некоторое число от 0 до 1.

Изменяя значение π и повторяя аналогичный вопрос, найдется значение π, при котором ЛПР не может выбрать из двух сценариев один из-за их "одинаковости" с его точки зрения. Скажем $\pi = 0.58$.

c. Теперь полезность 12\$ равна $0.58 \cdot 100 + (1 - 0.58) \cdot 0 = 58$.

d. Повторяя эту процедуру для всех элементов таблицы доходов, получим матрицу полезности.

Интересно отметить, что данная процедура аналогична уже рассмотренному определению субъективных вероятностей.

Формально можно говорить о том, что полезность u есть

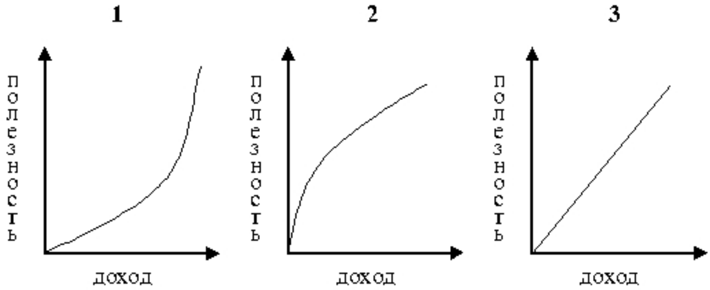

Рис. 1.1. Типовые графики зависимости полезности от дохода

функция дохода w, т.е. $u = u(w)$. С точки зрения отношения ЛПР к значимости денег можно выделить три типа поведения:

1. ЛПР готов идти на риск. Обычно говорят: *ищущие риск*. Очевидно, что некоторые люди в большей степени готовы идти на риск, чем другие: чем больше вознаграждение за риск, тем больше готовность идти на него. График зависимости полезности от величины дохода ($u = u(w)$) – выпуклая линия.

2. ЛПР готов избежать риска. Обычно говорят: *нерасположенные рисковать*. График зависимости полезности от величины дохода – вогнутая линия.

3. ЛПР не относится ни к первой, ни ко второй группе. Обычно говорят: *нейтральные к риску*. График зависимости полезности от величины дохода – прямая линия.

Типовые графики зависимости полезности от дохода для всех рассмотренных видов отношений к риску показаны на рис. 1.1.

На принятие решений также оказывают значительное влияние целый ряд психологических факторов, достаточно подробное описание которых приведено в работе Москвина [8]. Одним из таких факторов является *неприятие неопределенности*.

Мы склонны верить, что информация является необходимой составляющей рационального процесса принятия решений и что чем больше информации, тем легче выстраивать поведение в условиях риска. Эллсберг в 1961 г. опубликовал статью [1], в которой ввел понятие “неприятие неопределенности”. Оно означает, что люди предпочитают риск с известными вероятностями исходов риску с неизвестными вероятностями. Эллсберг предлагал нескольким группам людей ставить на цвет шара, доставаемого из урны. В двух урнах, по 100 шаров в каждой, были шары красного и черного цвета. В первой урне их было по 50 штук каждого цвета, а распределение во второй урне оставалось неизвестным. В соответствии с постулатом Лапласа это распределение следовало бы признать таким же, поскольку нет никаких оснований для иного предположения. Однако большинство респондентов тянули шары из первой урны.

Тверски и его коллега Фокс [2] более детально исследовали неприятие неопределенности и пришли к выводу, что дело обстоит значительно сложнее, чем предполагал Эллсберг. Они провели серию экспериментов, чтобы определить, всегда ли или только в случайных играх люди предпочитают иметь дело скорее с известными вероятностями, чем с неизвестными. Ответ оказался ясным и убедительным: люди предпочитают неизвестные вероятности в тех ситуациях, в которых они чувствуют свою компетентность, и известные вероятности, когда чувствуют себя некомпетентными. Отсюда Тверски и Фокс делают вывод, что неприятие неопределенности порождается чувством некомпетентности и проявляется, когда человек оценивает одновременно ясные и туманные перспективы, но оно уменьшается или исчезает вовсе, если оценивается каждая перспектива в отдельности.

Другим важным фактором является *асимметрия в подходах к принятию решений*. Когда речь идет о значительных суммах, многие отказываются от игры, предпочитая гарантированный доход, т.е. большинство предпочтет просто получить 100 тыс.$, чем играть, имея шансы 50 на 50, и выиграть 200 тыс.$ или не получить ничего. Другими словами, большинство людей не расположены к риску.

Но как обстоит дело с потерями? В статье, опубликованной в 1979 г., Канеман и Тверски [4] описали эксперимент, показывающий, что наш выбор между отрицательными исходами является зеркальным отображением нашего выбора между положительными исходами. В одном из экспериментов они сначала предлагали выбрать между возможностью получить 4 тыс.$ с вероятностью 0.8 (при вероятности 0.2 остаться при своих) и возможностью получить 3 тыс.$ с вероятностью 1. Хотя рискованный выбор имел более значительное математическое ожидание (получение 3.2 тыс.$), 80% опрошенных предпочли гарантированные 3 тыс.$. Эти люди избегали риска. Затем исследователи предложили выбрать между риском потери 4 тыс.$ с вероятностью 0.8 (при вероятности 0.2 не потерять ничего) и риском потерять 3 тыс.$ с вероятностью 1. Теперь 92% опрошенных выбрали игру, хотя математическое ожидание потери 3.2 тыс.$ снова было больше, чем гарантированная потеря 3 тыс.$. Когда выбор касается потерь, мы зачастую выбираем риск.

Канеман и Тверски, как и многие их коллеги, выяснили, что такая асимметричность встречается постоянно в самых разных экспериментах. Это поведение явно противоречит предположению о рациональности выбора. Ответ не должен был бы зависеть от формы постановки вопроса. Авторы теории перспективы истолковывают результаты этих экспериментов как демонстрацию того, что людям вовсе не свойственно отвращение к риску: они рады выбрать игру, если считают ее приемлемой. Но если они не боятся рисковать, то в чем же дело? По мнению Тверски, главное, что движет людьми – это опасение потерь. Люди не столько избегают неопределенности, сколько не приемлют потерь. Размеры потерь всегда кажутся больше размеров приобретений.

Перечисление и описание психологических факторов при принятии решений может быть продолжено. Однако приведенные два фактора в совокупности с концепцией полезности наиболее ярко отражают сложность и субъективность процесса принятия решений.

Пример 1.1. (Выбор оптимального распределения инвестиций, портфельная оптимизация). Рассмотрим на примере учет поведения ЛПР при инвестировании средств. Кроме того, в данном примере одновременно имеют место смешанная стратегия и непрерывное множество состояний природы. Предположим, что ЛПР имеет 10000$ для инвестиций в акции и облигации. Известно, что акции имеют переменный доход, равномерно распределенный со средним значением 10% и среднеквадратическим отклонением 2%. Облигации приносят четкий доход 5%. ЛПР не расположен рисковать и его функция полезности – $u(w) = \sqrt{w}$. Учитывая функцию полезности, ЛПР выбирает распределение инвестиций, которое максимизирует функцию полезности. Пусть λ_1 – доля инвестиций в акции ($0 \le \lambda_1 \le 1$), $\lambda_2 = 1 - \lambda_1$ – доля инвестиций в облигации. Ожидаемая полезность инвестора имеет вид

$$\mathbb{E}\mathbf{u}(\lambda) = \frac{1}{b-a}\int_a^b \sqrt{10000\lambda_1(1+r)}\mathrm{d}r + \sqrt{10000\lambda_2 \times 1.05} =$$
$$= 100\left[\frac{1}{b-a}\int_a^b \sqrt{\lambda_1(1+r)}\mathrm{d}r + \sqrt{\lambda_2 \times 1.05}\right],$$

где $[a,b]$ – интервал возможного дохода от акций и r – доход от акций.

Так как распределение дохода от акций равномерное, то выполняются условия $(a+b)/2 = 0.1$ и $(b-a)^2/12 = 0.0004$. Отсюда $a = 0.065$ и $b = 0.135$. Следовательно,

$$\mathbb{E}\mathbf{u}(\lambda) = 100\left[\frac{\sqrt{\lambda_1}}{0.07}\int_{0.065}^{0.135} \sqrt{(1+r)}\mathrm{d}r + \sqrt{\lambda_2 \times 1.05}\right] =$$
$$= 100\left[1.05\sqrt{\lambda_1} + \sqrt{1.05}\sqrt{(1-\lambda_1)}\right].$$

Оптимальное значение λ_1 равно 0.51, т.е. 51% денег следует вложить в акции и 49% – в облигации.

Если ЛПР готов идти на риск и его функция полезности – $u(w) = w^2$, то оптимальное значение λ_1 равно 0.47, т.е. 47% денег следует вложить в акции и 53% – в облигации.

Пример 1.2. (Определение величины страховки). Предположим, что субъект (ЛПР) имеет дом стоимостью W\$. Существует вероятность π того, что дом может быть разрушен наводнением или сгореть в пожаре. Предположим также, что ЛПР может купить такую страховку, что 1\$ ее стоимости покрывается x\$. Здесь x – страховая премия. Страховку какого размера готов купить ЛПР? Очевидно, что он купит страховку, которая совместима с его ощущением риска, т.е. соответствующую его индивидуальной функции полезности $u(w)$. Исходя из критерия максимума ожидаемой полезности, стоимость страховки q должна максимизировать ожидаемую полезность

$$\mathbb{E}\mathbf{u}(q) = \pi u(q - xq) + (1-\pi)u(W - xq).$$

Это выражение получено из следующих соображений. Если дом разрушен с вероятностью π, его хозяин получит страховку q минус страховые выплаты xq. С другой стороны, с вероятностью $1-\pi$ дом не будет разрушен. В этом случае его стоимость будет равна $W - xq$. Если считать, что функция u определена только для положительных доходов, то $W - xq \geq 0$. Это гарантирует, что значения ожидаемой полезности $\mathbb{E}\mathbf{u}(q)$ находятся в интервале $[0, W/x]$. Пусть $W = 100000$, $\pi = 0.01$, $x = 0.02$. Тогда максимум $\mathbb{E}\mathbf{u}(q)$ зависит от типа ЛПР.

Случай 1. ЛПР не расположен рисковать и его функция полезности – $u(w) = \sqrt{w}$. В этом случае

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\mathbf{u}(q) &= \pi\sqrt{(1-x)q} + (1-\pi)\sqrt{W - xq} = \\ &= 0.01\left[\sqrt{0.98q} + 99\sqrt{W - 0.02q}\right].\end{aligned}$$

Дифференцируя $\mathbb{E}\mathbf{u}(q)$ по q и принимая $\mathrm{d}\mathbb{E}\mathbf{u}(q)/\mathrm{d}q = 0$, получим $q =$ 24873\$.

Случай 2. Субъект является ищущим риска и его функция полезности – $u(w) = w^2$. В этом случае

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\mathbf{u}(q) &= \pi(q - xq)^2 + (1-\pi)(W - xq)^2 = \\ &= 0.01(q^2 - 3.96Wq + 99W^2).\end{aligned}$$

Ожидаемая полезность максимальна при $q = 0\$$. Это означает, что данный субъект вообще не будет покупать страховку.

Случай 3. Субъект является нейтральным к риску и $u(w) = w$. Тогда

$$\mathbb{E}\mathbf{u}(q) = -0.01q + 99000.$$

Ожидаемая полезность максимальна при $q = 0\$$.

1.6. Основные аксиомы теории полезности

Если решение a ведет к одному из альтернативных уровней дохода w_1, w_2 и w_3, то результатом решения будет один из альтернативных уровней полезности $u(w_1)$, $u(w_2)$ и $u(w_3)$. Если известны вероятности π_1, π_2 и π_3 каждого из трех исходов, то ожидаемая полезность решения a равна

$$\mathbb{E}u(a) = \pi_1 u(w_1) + \pi_1 u(w_1) + \pi_1 u(w_1).$$

Функция $u(w)$ также называется функцией полезности фон Неймана–Моргенштерна.

Представление предпочтений в форме ожидаемой полезности фон Неймана–Маргенштерна $\mathbb{E}u(a)$ гарантируется при условии соблюдения ряда аксиом, которые приводятся ниже [6, 9, 10].

Каждое решение, принятое в условиях неопределенности или риска, можно рассматривать как выбор лотереи L по всем альтернативным уровням дохода w_i, где каждому уровню w_i дохода приписана вероятность π_i. Вероятность π_i есть вероятность получения дохода w_i, когда решение сделано. Введем понятие лотереи. Лотерея есть случайный механизм, который дает в качестве исходов события получение доходов $w_1, ..., w_m$ с известными вероятностями $\pi_1, ..., \pi_m$, $\pi_1 + ... + \pi_m = 1$. Как показано в работе [7], лотерею можно представить как следующий опыт: единичная окружность разбивается на дуги длиной $\pi_1, ..., \pi_m$, поворачивают стрелку, и, если ее конец остановился на дуге длиной π_i, это значит, что исходом является выигрыш w_i.

Лотерею L можно рассматривать как множество пар вида $L = \{(w_i, \pi_i) : i = 1, ..., m\}$, и принятие решений представляется как выбор одной из альтернативных лотерей. Если субъект должен выбрать одну из двух лотерей L_1 и L_2, то устанавливаются предпочтения субъекта: L_1 предпочтительнее L_2, L_2 предпочтительнее L_1, L_1 и L_2 неразличимы или равноценны. Будем понимать под записью $w_i \succsim w_j$ то, что w_j не предпочтительнее, чем w_i, или w_i предпочтительнее, чем w_j, или равноценно w_j.

Аксиома 1 (порядок альтернатив). *Порядок "предпочтения или равноценности" $\succsim$ имеет место для любых двух выигрышей и является транзитивным понятием. Формально, для любых w_i и w_j либо $w_i \succsim w_j$, либо $w_j \succsim w_i$, а если $w_i \succsim w_j$ и $w_j \succsim w_k$, то $w_i \succsim w_k$.*

Предположим, что имеются две лотереи с одним и тем же множеством альтернатив

$$L_1 = \{(w_i, \pi_i) : i = 1, ..., m\},$$

$$L_2 = \{(w_i^*, \pi_i^*) : i = 1, ..., m\}.$$

Тогда каждая вероятность π приводит к новой лотереи

$$\pi L_1 + (1 - \pi) L_2 =$$
$$= \{(\pi w_i + (1 - \pi) w_i^*,\ \pi \pi_i + (1 - \pi) \pi_i^*) : i = 1, ..., m\}.$$

Если лотереи L_1 и L_2 не имеют одних и тех же альтернатив, то можно всегда взять объединение A всех возможных альтернатив и рассматривать L_1 и L_2 как имеющие альтернативы из

A. При этом вероятности альтернатив из A, не принадлежащих L_1, равны нулю и наоборот. Любая лотерея вида $\pi L_1 + (1-\pi)L_2$ называется составной.

Предположим теперь, что субъект предпочитает лотерею L_1 лотереи L_2. Естественно ожидать, что если "смешать" третью лотерею L_3 с L_1 и L_2, то предпочтение L_1 к L_2 останется неизменным. Это рассуждение определяет следующую аксиому.

Аксиома 2 (независимость). *Выбор субъекта лотереи удовлетворяет аксиоме независимости, согласно которой всякий раз, когда лотерея L_1 предпочтительнее лотереи L_2, то для любого $0 < \pi < 1$ составная лотерея $\pi L_1 + (1-\pi)L_3$ предпочтительнее составной лотереи $\pi L_2 + (1-\pi)L_3$ для всех лотерей L_3.*

Аксиома 3 (непрерывность). *Выбор субъекта лотереи удовлетворяет аксиоме непрерывности, согласно которой всякий раз, когда последовательность $\{\pi_n\}$ вероятностей сходится к π, т.е. $\pi_n \to \pi$ и лотерея $\pi_n L_1 + (1-\pi_n)L_2$ предпочтительнее лотереи L_3 для всех n, то лотерея $\pi L_1 + (1-\pi)L_2$ будет предпочтительнее лотереи L_3.*

Теорема ожидаемой полезности. *Пусть L – множество всех лотерей. Если функция полезности субъекта $U : L \to R$, определенная на множестве лотерей удовлетворяет приведенным выше аксиомам, то существует функция полезности фон Неймана–Моргенштерна $u(w)$, зависящая от дохода w, такая что*

$$U(L) = \sum_{i=1}^{m} \pi_i u(w_i)$$

для всех лотерей $L = \{(w_i, \pi_i) : i = 1, ..., m\}$.

Приведенные аксиомы и теорема ожидаемой полезности позволяют взглянуть на поведение ЛПР с формальной точки зрения. Формально выбор типа поведения может быть представлен следующим образом. Рассмотрим лотерею с двумя призами w_1 и w_2. Также предположим, что функция полезности $u(w)$ является строго возрастающей. Ожидаемая полезность этой лотереи – $\pi_1 u(w_1) + (1-\pi_1)u(w_2)$, а ожидаемое денежное вознаграждение – $\pi_1 w_1 + (1-\pi_1)w_2$. Выигрыш в этом случае равен

$$w = \pi_1 w_1 + (1-\pi_1)w_2 - u(\pi_1 u(w_1) + (1-\pi_1)u(w_2)).$$

Отрицательное значение w говорит о том, что

$$u(\pi_1 u(w_1) + (1-\pi_1)u(w_2)) \geq \pi_1 w_1 + (1-\pi_1)w_2.$$

Следовательно,

$$\pi_1 u(w_1) + (1-\pi_1)u(w_2) \geq \pi_1 w_1 + (1-\pi_1)w_2.$$

Это означает, что функция полезности $u(w)$ является выпуклой, что в свою очередь означает, что ЛПР расположен рисковать. Аналогично можно получить вогнутость функции полезности для нерасположенного рисковать ЛПР. В этом случае w является положительным.

1.7. Контрольные вопросы

1) Раскройте аббревиатуру ЛПР и объясните, что она означает.

2) Чем определяется смешанная стратегия в принятии решений?

3) Какими способами реализуется смешанная стратегия?

4) Какое действие является оптимальным при смешанной стратегии в принятии решений?

5) Какой из критериев применяется в задаче принятия решений в условиях неопределенности?

6) Какой из критериев применяется в задаче принятия решений в условиях риска?

7) Какой из критериев является наиболее пессимистичным в задаче принятия решений в условиях неопределенности?

8) Что означает полнота множества состояний природы в задаче принятия решений?

9) Какая главная отличительная особенность критерия максимина в принятии решений?

10) Какие недостатки имеет критерий Лапласа?

11) Какие недостатки имеет критерий Вальда?

12) Когда имеет место задача принятия решений в условиях риска?

13) Когда имеет место задача принятия решений в условиях полной неопределенности?

14) Когда имеет место задача принятия решений в условиях определенности?

15) Что такое сожаления в теории принятия решений?

16) Какой смысл имеет критерий пессимизма-оптимизма Гурвица?

17) Какое действие является оптимальным в соответствии с критерием наиболее вероятного состояния природы?

18) Какие аргументы имеет функция полезности?

19) В каком случае смешанная стратегия принятия решений совпадает с чистой стратегией?

20) Чем определяется чистая стратегия в принятии решений?

21) Какие три типа отношения ЛПР к риску существуют?

22) В чем заключается фактор неприятия неопределенности в принятии решения?

23) В чем заключается фактор асимметрии в принятии решения?

24) Комбинацией каких критериев является критерий Ходжа-Лемана?

1.8. Задачи

1) Имеются две альтернативы: купить акции предприятия и держать деньги в банке. Имеются также два состояния природы: спад в экономике и рост. В случае спада потери от акций 10 у.е., доход от банка 15 у.е. В случае подъема доход от акций 40 у.е., а от банка 15 у.е. Какое действие является оптимальным, если известно, что будет наблюдаться состояние роста экономики?

2) Имеются две альтернативы: купить акции предприятия и держать деньги в банке. Имеются также два состояния природы: спад в экономике и рост с вероятностями 0.6 и 0.4. В случае спада потери от акций 10 у.е., доход от банка 15 у.е. В случае подъема доход от акций 40 у.е., а от банка 15 у.е. Какое действие является оптимальным для критериев:

   а) наиболее вероятного состояния природы?

   б) максимума ожидаемой полезности?

   в) минимума ожидаемых сожалений?

   г) Ходжа-Лемана?

3) Имеются две альтернативы: купить акции предприятия и держать деньги в банке. Имеются также два состояния природы: спад в экономике и рост. В случае спада потери от акций 10 у.е., доход от банка 15 у.е. В случае подъема доход от акций 40 у.е., а от банка 15 у.е. Какое действие является оптимальным для критериев:

   а) минимакса сожалений?

   б) равновозможных состояний (критерия Лапласа)?

   в) максимина Вальда?

   г) пессимизма-оптимизма Гурвица с коэффициентом пессимизма 0.6?

   д) минимакса сожалений Сэвиджа?

Литература

1. *Ellsberg, D.* Risk, ambiguity, and the savage axioms / D. Ellsberg // *Quarterly Journal of Economics.* — 1961. — Vol. LXXV. — Pp. 643–669.
2. *Fox, C.* Ambiguity aversion and comparative ignorance / C.R. Fox, A. Tversky // *Quarterly Journal of Economics.* — 1995. — Vol. CX, no. 3. — Pp. 585–603.
3. *Hodges, J.* The use of previous experience in reaching statistical decisions / J.L. Hodges, E. Lehmann // *Ann. Math. Stat.* — 1952. — Vol. 23, no. 3. — Pp. 396–407.
4. *Kaneman, D.* Prospect theory: an analysis of decision under risk / D. Kaneman, A. Tversky // *Econometrica.* — 1979. — Vol. 47, no. 2. — Pp. 263–291.
5. *Кини, Р.* Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения / Р.Л. Кини, Х. Райфа. — Москва: Радио и связь, 1981. — 560 с.
6. *Ларичев, О. И.* Теория и методы принятия решений, а также Хроника событий в Волшебных Странах / О. И. Ларичев. — Москва: Логос, 2000. — 296 с.
7. *Льюс, Р.* Игры и решения: Введение и критический обзор / Р.Д. Льюс, Х. Райфа. — Москва: Изд-во иностранной литературы, 1961. — 642 с.
8. *Москвин, В.* Психологический аспект принятия инвестиционного решения / В.А. Москвин // *Инвестиционное кредитование.* — 2002. — № 5. — С. 26–32.
9. *Нейман, Д.* Теория игр и экономическое поведение / Дж.фон Нейман, О. Моргенштерн. — Москва: Наука, 1970. — 708 с.
10. *Райфа, Х.* Анализ решений / Х. Райфа. — Москва: Наука, 1977. — 408 с.
11. *Розен, В.* Математические модели принятия решений в

экономике / В.В. Розен. — Москва: Книжный дом "Университет", Высшая школа, 2002. — 288 с.

12. *Черноруцкий, И.* Методы принятия решений / И.Г. Черноруцкий. — Санкт-Петербург: БХВ-Петербург, 2005. — 408 с.